数学女孩

阅读数学轻小说, 很奇妙的一段旅程, 也很爽 (各种意义上).

推荐给喜欢数学, 或数学差而不知如何学习数学, 或想了解完美的教学方式, 或喜欢恋爱小说的同学读一读, 无论是高中, 还是大学, 还是已步入工作, 都可以看, 相信也都会有所收获.

费曼曾在一次演讲中说道: " '基础'不代表简单易懂. '基础' 意味着, 理解这些内容并不需要什么前置知识 (, 只需要有无尽的智慧)." 同时他也十分擅长将复杂艰深的概念变得通俗易懂.

而这本书一个很大的价值, 就是向读者展示书本学习中那些 "天外飞仙" 的公式与定理, 并不是真的 "从石头缝里蹦出来的". 它们都是经历了一步一步的推理, 一次一次的试错, 甚至是逻辑的必然. 只不过为了更快地让学生掌握, 书中常略去其中的细节. 单纯的严谨证明未必是完整的细节, 完整的细节还应包括思考过程, 思考每一步的逻辑原因.

再引用 Arnold Ross 的一句名言: "证明的目的是理解, 而不是验证."

实际上我已读完这个系列第一本书 (共六本), 借着这次活动的机会, 我边读这些书, 边在第二遍梳理时整理与探索一些有趣的东西. 读一遍只觉得爽, 梳理才能更充分地习得知识 (尽管未必说得上掌握).

第 1 章 数列和数学模型

印象深刻的是这个数列: 6, 2, 8, 2, 10, 18, 求其通项.

初看无思路, 思索亦无果, 18 尤为恼人.

破题点在于看问题的角度, 从仅考察数列相邻若干项的惯性思维, 转换为同时考虑全体已知数字, 答案便呼之欲出了.

可能会觉得这只是一个无趣的脑筋急转弯, 但数学研究常常需要这种洞察力, 灵活转变视角的洞察力.

实际上数列智力题没有正确答案, 所谓的根据前 n 项求其通项, 也只不过是猜测而已.

这里不得不提到著名的拉格朗日插值公式

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)\prod_{i=0,\, i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right].$$

当然这也不是什么 "天外飞仙" 的结果. 它可以像任何一本数学分析的书中那样推导, 也可以与中国剩余定理巧妙地联系起来. 这里容我夹带私货, 安利一下乐正垂星与真理元素的视频. 不过这些并不是故事的主角.

这是一个经典的数列: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 27... (赋予哲学意义, 请)

通项是: $\underbrace{2^0 3^0}_{\text{指数之和为 }0}, \underbrace{2^1 3^0, 2^0 3^1}_{\text{指数之和为 }1}, \underbrace{2^2 3^0, 2^1 3^1, 2^0 3^2}_{\text{指数之和为 }2}, \underbrace{2^3 3^0, 2^2 3^1, 2^1 3^2, 2^0 3^3}_{\text{指数之和为 }3}, \cdots$

第 2 章 一封名叫数学公式的情书

题外话：这章的标题让我想起一本书：《度量——一首送给数学的情歌》，这是三蓝一棕推荐的（每日安利 up (1/1)），适合中学同学阅读，不过大学生或成人同样可以看看. 这本书不是一本教材, 而像是与读者交流, 带领读者走进数学的世界, 告诉读者如何在数学的森林中前行. 内容主要是初等的数学, 但涵盖大量 "aha moment", 巧妙的思路, 精美的艺术; 后半部分则涉及一些微积分, 不过也是侧重于直观的理解.

我至今还不知道故事中的 "我" 叫什么名字. 可能 "我" 就是我吧.

故事里的米尔嘉是 "用一流解法打动我的才女", 亦师亦友, 可遇不可求;

故事里的泰朵拉是 "认真向我发问的活力少女", 教学相长, 真诚而好问.

故事从第一章的智力题出发, 但不乏严谨. 第二章便以定义这样最基础的东西向读者强调了严谨的重要性.

只能被 1 和自身整除的正整数叫作质数. 这句话并不严谨, 首先要排除负数作除数, 其次要说明质数不包括 1.

那为什么质数不包括 1 呢? 小学与初中我都没有思考过这个问题, 只是拿来主义. 这并不是正确的学习方式, 知其然亦应知其所以然. 数学建构于定义与公理之上, 但这不意味着它们是无缘无故凭空出现的.

质数之所以不包括 1, 是因为质因数唯一分解定理, 为了表述方便. 类似的也有近代欧氏几何中平行直线相交于无穷远点、点是半径为零的圆等概念的引入. 纵观数学发展史亦如此, 许多概念都是由难题出发, 提出新的想法与思路, 由这些想法解决了问题后发现普适性, 再由此确定定义, 并在之后的发展中不断完善与修正. (参考视频: 数学约定主义: 停止提出 "蠢问题")

定义需要严谨, 方便使用, 并具有普适性.

应区分相似的概念并加以归纳整理.

⭐ 将正整数 n 质因数分解为 $n=\displaystyle\prod_{k=0}^{m} p_k^{a_k}$, 则其所有约数之和为 $\displaystyle\prod_{k=0}^{m}\frac{1-p_k^{a_k+1}}{1-p_k}$.

最后摘抄一段话, 送给每一个人:

> “哇，太厉害了！但像您这样反复思考，不是很费时间吗？”
>
> “嗯，确实费时间，而且很费时间，但那是很正常的啊。你想想看，数学公式的背后都有悠久的历史。研究数学公式，就是在挑战之前无数数学家所做的工作。为了理解这些成果，花时间是自然的。在展开一个数学公式的时候，我们跨越了几百年的时间。在验证这些数学公式时，我们每个人都是‘小数学家’。”

第 3 章 ω 的华尔兹

> 数学的本质在于它的自由。——康托尔

推导倍角公式（或两角和与差）：

$$\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

复数的乘法可以看成旋转（刻入 DNA: 模相乘，幅角相加）.

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$ 可以看成复平面的单位圆上点的旋转；
$(-1)^n$ 可以看成数轴上的振动，也可以看作复平面的旋转在实轴的投影.

第 4 章 斐波那契数列和生成函数

等比数列求和公式有不少有趣的推导方式

$$\begin{tikzcd} \text{数列} \arrow[r] & \text{生成函数} \arrow[d] \\ \text{数列的通项} & \text{生成函数的有限项代数式} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

斐波那契数列生成函数的封闭表达式：

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \quad \Rightarrow \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

第 5 章 基本不等式

> 任何有创意的喜悦，都会在自己所做事情的边界线上释放出来。——侯世达

这一章以基本不等式为背景，主要讲了数学的学习方法，并通过不等式的推导讲述了发现公式、扩展定义域的方法. 推荐阅读，赞同观点，但不做太多评价——不如阅读原文，对话形式的故事也许更有说服力.

以指数为例，x^a，这里的 a 从正整数，到整数，到有理数，到实数，到复数，到向量，到矩阵，到算子...

> 数学家们喜欢试着把各种东西都塞到级数里看看。——Grant Sanderson

第 6 章 在米尔嘉旁边

> 解析是研究连续函数的。数论是研究离散函数的。欧拉把这两者结合了起来。——威廉·邓纳姆

讲述了微分与导数的由来.（参考三蓝一棕的 "微积分的本质"）

非常有趣的是，将差分与微分联系了起来，巧妙的类比：

连续函数	**离散函数**
微分	差分
d	Δ
$\int$	$\sum$
$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)}.$	$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+1)-f(x+0)}{(x+1)-(x+0)}.$
$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$	$\frac{\Delta x^{\underline{n}}}{\Delta x} = nx^{\underline{n-1}}$（下降阶乘幂）

连续函数	离散函数
$\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$	$\dfrac{\Delta 2^x}{\Delta x}=2^x$
$\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{\Delta H_x}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}$

第一次知道 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\underline{k}}=\dfrac{n^{\underline{k+1}}}{k+1}$ 并接触差分的概念，还是在风竹云墨的视频里，以另一种形式由数归得. 当时也提到了算子的类比，只是没注意到上表中后三行的类比.

题外话：为了快速打出 $\dfrac{\Delta}{\Delta x}$，跑去写了两个可变参数的指令，可惜 typora 不能使用 xparse 宏包，又写了三个固定参数的指令凑合着用.

第 7 章 卷积

> 这个方法虽然看上去很完美，没有任何瑕疵，但究竟是怎么想出这个方法的呢？这个实验虽然看上去很科学，并能反映出事实，但究竟是怎么发现这个实验的呢？我究竟该怎么做才能想出或发现方法呢？——波利亚，《怎样解题》

这里只罗列涉及到的部分式子, 原书中的对话交谈和故事情节很有趣, 穿插着讲了探索的心路历程. 除了最后一小节有点怪, 虽然说高等近代欧氏几何中认为点是半径为零的圆, 但和这一节的内容放一起有点牵强.

组合公式的一个很漂亮的写法: $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n^{\underline{k}}}{k^{\underline{k}}}$.

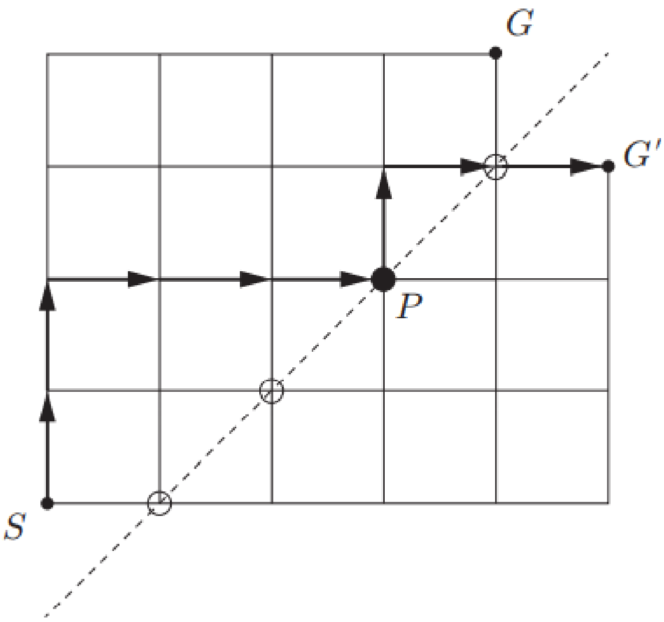
$0+1+2+\cdots+n$ 的加括号的方法数 $\{C_n\}$ (或凸多边形的三角划分数. 即卡塔兰数)

法一　生成函数 + 泰勒展开

$$\begin{cases} C_0=1, \\ \\ C_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}, \quad n\geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n+\cdots \\ C(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^n=\frac{C(x)-C_0}{x} \\ C(x) &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (\text{根据特殊值舍去另一解}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1} \quad (\text{展开表达式}) \end{aligned}$$

法二　另辟蹊径 + 几何思维



$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

> “数列王国”中的“卷积”就是“生成函数王国”中的“乘积”。

第 8 章 调和数

> 巴赫把音乐的各个声部想象成一起聊天的好朋友。比如有三个声部，它们会偶尔沉默，去倾听旁人的话语，同时也会去表达自己想说的话。—Forkel，《巴赫传》

这一章主要是给中学生科普的数列极限概念, 涉及了柯西乘积和卷积等, 侧重于严谨的思维与表述 (数学语言).

> 仅仅反复玩弄公式并不是数学。

数形结合往往能给人更多的启发.

下降阶乘幂相对于一般意义的阶乘, 有一个优点是便于扩展定义域.
参考 "无懈可击 99" 的 《不用积分定义复数阶乘》， 也是十分有趣的一期视频.

连续函数的世界里的对数函数, 正对应着离散函数的世界里的调和数 (不是调和级数).

欧拉乘积公式 (以一个奇怪但有趣的想法引入)

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

很奇妙的公式, 也可以以此证明素数无穷.

第 9 章 泰勒展开和巴塞尔问题

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \\
\frac{\sin x}{x} &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \\
\frac{\pi^2}{6} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \quad (\text{比较 } x^2 \text{ 的系数})
\end{aligned}
$$

上述思路直观, 但不够严谨. 更严谨的证明可以参考教材, 需要用到无穷乘积的敛散性判别和极限的夹逼性.

类似的, 还有如下公式:

$$
\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right)
$$

$$\sin(2n+1)x=\sin x\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{2l}(1-\sin^2x)^l(-\sin^2x)^{n-l}$$

$$\cos(2n+1)x=\cos x\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{2l+1}(1-\sin^2x)^l(-\sin^2x)^{n-l}$$

$$\tan(nx)=\frac{\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l C_{2l+1}^{n}\tan^{2l+1}x}{\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l C_{2l}^{n}\tan^{2l}x}$$

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \qquad \frac{\sin\pi x}{\pi x}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right) \qquad \cos\pi x=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n-\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{[(n-\frac{1}{2})\pi]^2-x^2} \qquad \frac{\pi\tan\pi x}{2x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2-x^2}$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x}{x^2-n^2\pi^2} \qquad \frac{\pi x}{\sin\pi x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2x^2}{x^2-n^2}$$

$$\frac{1}{\tan x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n\pi x}{x^2-n^2\pi^2} \qquad \frac{1}{\tan\pi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx}{x^2-n^2}$$

第 10 章 分拆数

> 告白的答案在银河的尽头。—小松美和

之前学抽代时经常分拆一些数字 (比如求对称群或交错群的元素周期或子群阶数), 不过并没有尝试过推导分拆数的通项.

"带有限制的分拆数" 和当时看的教材里的 "weird dice" 那一节异曲同工:
若骰子各个面的点数是任意设置的正整数, 则如何设置可以使这样的骰子掷两次的点数之和, 在分布上与普通的骰子 (各个面为 1, 2, 3, 4, 5, 6) 投掷两次点数之和相同? 答案是 1, 3, 4, 5, 6, 8 (Sicherman 骰子).

To be continued.

> 数学跨越时空。